

Esipuhe

Matematiikka tieteiden kuningatar ja palvelija on lukioihin ja ammattikorkeakouluihin suunnattuun koulukohtaiseen valinnaiseen syventävään kurssiin perustuva kirja. Kirjan tarkoituksena on kerrata ja syventää aiemmillä kursseilla opittuja asioita uusien lisäksi. Kirjassa esitellään myös sovelluksiin liittyvää matematiikkaa, mm. Googlen toimintaperiaatetta, GPS-paikannusta ja MP3-pakkaustekniikkaa. Kirja motivoi matematiikan oppimista ja helpottaa korkeakouluopintojen aloittamista.

Kurssin aiheita ovat: differentiaalilaskenta työkaluna, matematiikan perusteet, kompleksilukujen joukko ja matriisit sekä niiden sovellukset. Differentiaalilaskennan ydinsisältöjä ovat derivaatan käsite, differentiaaliyhtälöt sekä niiden käyttö mallinnuksessa, esimerkiksi peto-saalismalli. Matematiikan perusteiden tarkoituksena on kehittää matemaattista lukutaitoa ja ajattelukykyä. Keskeisiä sisältöjä ovat väite, matemaattinen todistaminen, joukko-oppi, luonnolliset luvut ja reaalityluvut. Kompleksiluvut esitetään tason pisteinä ja niiden laskutoimitukset kuvataan geometrisesti. Lisäksi ratkaistaan yksinkertaisia kompleksisia yhtälöitä ja esitetään sovelluksena vaihtopiiriesimerkki. Viimeisessä luvussa otetaan käyttöön matriisin käsite ja käydään läpi matriisialgebraa, lineaaristen yhtälöryhmien ratkaisumenetelmiä ja ominaisarvoteoriaa. Näitä sovelletaan yllä mainittuihin ajankohtaisiin tekniikan esimerkkeihin. Scilabia, Octavea tai vastaavia kaupallisia ohjelmia, kuten MatLab ja Maple, voidaan käyttää kirjan ohessa ja osassa esimerkeistä on annettu ohjeita tähän.

Kurssin sisällöstä vastaavat kirjan kirjoittajat, jotka ovat Tampereen teknillisen yliopiston matematiikan opettajia. Kirjan kirjoittajien lisäksi kurssin tekemisessä ja kommentoimisessa ovat aktiivisesti olleet mukana opettajat Sarpa Heino (Hervannan lukio), Ville Hynönen (Helsingin Suomalaisen Yhteiskoulun lukio), Sinikka Järvi (Valkeakosken lukio), Jukka Männistö (Tampereen normaalikoulun lukio), Sakari Salonen (Kaurialan lukio), Ulla Sorri (Hervannan lukio) ja Marja Voipio (Etelä-Tapiolan lukio). Projektitutkijoina mukana ovat olleet Virve Pihlava-Lahtinen ja Lauri Judin sekä sihteerinä Tiina Sävilähti. Yhteistyökouluja ovat Etelä-Tapiolan lukio, Helsingin Suomalaisen Yhteiskoulun lukio, Hervannan lukio, Kaurialan lukio, Tampereen normaalikoulun lukio ja Valkeakosken lukio, joissa kurssia on kokeiltu lukuvuonna 2008-2009.

Kirjaprojektin johtajana haluan kiittää kaikkia mukana olleita arvokkaasta työstä ja lukuisista antoisista keskusteluista. Erityinen kiitos kuuluu myös projektin rahoittajille Teknologiaateollisuuden 100-vuotissäätiölle ja TTY:n matematiikan laitokselle.

Tampereella tammikuussa 2009

SIRKKA-LIISA ERIKSSON

Sisältö

1	Differentiaalilaskenta työkaluna	7
1.1	Johdanto	7
1.2	Derivaatta	7
1.2.1	Pala historiaa	10
1.2.2	Esimerkkejä	11
1.2.3	Harjoitustehtäviä	14
1.3	Integraali	15
1.3.1	Harjoitustehtäviä	16
1.4	Differentiaaliyhtälö	17
1.5	Separoituva differentiaaliyhtälö	20
1.5.1	Harjoitustehtäviä	21
1.6	Alkuarvo-ongelma	22
1.7	Lineaarinen differentiaaliyhtälö	23
1.7.1	Harjoitustehtäviä	28
1.8	Differentiaaliyhtälöpari	29
1.8.1	Harjoitustehtäviä	31
1.9	Differentiaaliyhtälöryhmä	32
2	Matematiikan perusteista	35
2.1	Taustaa	35
2.1.1	Harjoitustehtäviä	39
2.2	Väite matematiikassa	39
2.2.1	Harjoitustehtäviä	44
2.3	Matemaattinen todistus	45
2.3.1	Harjoitustehtäviä	58
2.4	Joukko-opista	59
2.4.1	Harjoitustehtäviä	70
2.5	Matemaattinen induktio	71
2.5.1	Harjoitustehtäviä	77

2.6	Reaaliluvuista	78
2.6.1	Harjoitustehtäviä	81
3	Kompleksiluvut	83
3.1	Moduli ja argumentti	83
3.1.1	Harjoitustehtäviä	89
3.2	Kompleksilukujen yhteenlasku	90
3.2.1	Harjoitustehtäviä	92
3.3	Kompleksilukujen kertolasku	92
3.3.1	Harjoitustehtäviä	100
3.4	Kompleksiluvun liittoluku	102
3.4.1	Harjoitustehtäviä	104
3.5	Kompleksinen eksponenttifunktio	105
3.5.1	Harjoitustehtäviä	119
4	Matriisilaskentaa	121
4.1	Matriisilaskennan tarve sovelluksissa	121
4.2	Vektorin käsite	121
4.2.1	Harjoitustehtäviä	130
4.3	Matriisin käsite	132
4.3.1	Harjoitustehtäviä	135
4.4	Erityisiä matriiseja	136
4.4.1	Harjoitustehtäviä	137
4.5	Matriisien laskutoimituksia	138
4.5.1	Matriisien yhteenlasku	138
4.5.2	Matriisin kertominen skalaarilla	139
4.5.3	Matriisien vähennyslasku	140
4.5.4	Harjoitustehtäviä	141
4.6	Matriisitulo	142
4.6.1	Harjoitustehtäviä	146
4.7	Lineaariset yhtälöryhmät	148
4.7.1	Harjoitustehtäviä	156
4.8	Käänteismatriisi	158
4.8.1	Harjoitustehtäviä	160
4.9	Ominaisarvot ja ominaisvektorit	162
4.9.1	Harjoitustehtäviä	169
4.10	Sovellusesimerkki GPS-paikkannuksesta	170
4.10.1	Harjoitustehtäviä	173
4.11	Googlen algoritmi sivujen vertailussa	175
4.12	Lyhyesti 3D-grafikasta	179
4.13	MP3-pakkauksesta	185

Luku 1

Differentiaalilaskenta työkaluna

1.1 Johdanto

Tässä luvussa tutustutaan differentiaalilaskentaan ja differentiaaliyhtälöihin. Tarkasteluissa on tärkeää, että opiskelija ymmärtää syvällisesti derivaatan ja integraalin käsitteet sekä osaa derivoida ja integroida alkeisfunktioita.

1.2 Derivaatta

Palautetaan aluksi mieleen derivaatan määritelmä sekä määritelmästä johdetut yleisimmät derivaatan laskusäännöt.

Määritelmä 1. Funktiolla f on *derivaatta kohdassa x* , jos erotusosamäärän raja-arvo

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

on äärellisenä olemassa kohdassa x . Tällöin sanotaan myös, että funktio on *derivoituva* kohdassa x .

Funktio on *derivoituva* avoimella välillä $]a, b[$, jos se on derivoituva jokaisessa välin pisteessä.

Funktion f *derivaattafunktio* f' määritellään erotusosamäärän raja-arvona

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

kaikissa niissä kohdissa, joissa f on derivoituva (eli kun raja-arvo on äärellinen reaaliluku).

Määritelmä 1 kertoo, mikä derivaatta on ja on hyvin tärkeää sisäistää, mitä määritelmällä tarkoitetaan. Pohtimiseen kannattaa käyttää aikaa. Myöhemmin tarkastellaan historiallisesta näkökulmasta, miksi kyseiseen määritelmään on päädytty.

Derivaattaa käsittelevällä opintojaksolla on opiskeltu derivaatan laskusääntöjä. Nämä kaikki laskusäännöt on pystyttävä johtamaan derivaatan määritelmästä. Seuraavaksi palautetaan mieleen yleisimmät säännöt.

Lause 1. Olkoot g ja t derivoituvia funktioita avoimella välillä $]a, b[$. Tällöin

- jos $f(x) = c$ (c on vakio), avoimella välillä $]a, b[$, niin $f'(x) = 0$,
- jos $f(x) = x^r$, $r \in \mathbb{Q}$, niin $f'(x) = rx^{r-1}$,
- jos $f(x) = cg(x) + dt(x)$, niin $f'(x) = cg'(x) + dt'(x)$, kun c ja d ovat reaalilukuvakioita,
- jos $f(x) = g(x)t(x)$, niin $f'(x) = g'(x)t(x) + g(x)t'(x)$.

Todistetaan viimeinen kohta eli tulon derivoimissääntö. Muut jätetään itsenäisesti pohdiskeltaviksi.

Todistus. Olkoon $f(x) = g(x)t(x)$. Tällöin

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h)t(x+h) - g(x)t(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h)t(x+h) - g(x)t(x+h) + g(x)t(x+h) - g(x)t(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h)t(x+h) - g(x)t(x+h)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x)t(x+h) - g(x)t(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \lim_{h \rightarrow 0} t(x+h) + g(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{t(x+h) - t(x)}{h} \\ &= g'(x)t(x) + g(x)t'(x). \end{aligned}$$

Luku 3

Kompleksiluvut

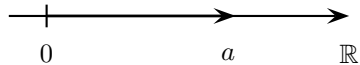
3.1 Moduli ja argumentti

Lukualueiden laajeneminen ei pysähdy vielä reaalityyppisiin. Tiedetään, että kaikilla reaalilukukertoimisilla yhtälöillä ei ole ratkaisua reaalilukujen joukossa. Tällainen yhtälö on esimerkiksi

$$x^2 + 1 = 0.$$

Laajennetaan lukualuetta, jotta tälläkin yhtälöllä olisi ratkaisu.

Reaaliluku voidaan esittää suoran yksiulotteisena paikkavektorina, joka alkaa pisteestä 0 ja jonka päätepiste on jokin suoran piste.



Kuva 3.1: $a \in \mathbb{R}$.

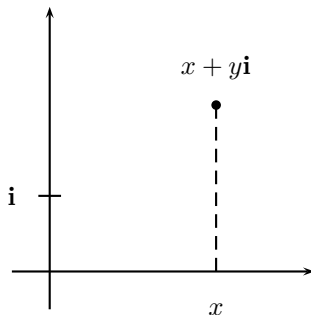
Reaaliluvun kertominen negatiivisella luvulla -1 vastaa paikkavektorin kiertämistä kulman π (180°) verran vastapäivään. Laajennetaan reaalilukusuora tasoksi eli kaksiulotteisiksi luvuiksi. Pyritään määrittelemään kertolasku tasossa, joka geometrisesti liittyy kiertoon.

Merkitään tason pistettä uudella tavalla

$$(x, y) = x + yi,$$

missä $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$. Tällöin

$$\mathbf{i} = (0, 1) \quad \text{ja} \quad 1 = (1, 0).$$



Kuva 3.2: Piste $x + yi$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$.

Lisäksi

$$0 = (0, 0) = 0 + 0\mathbf{i}.$$

Merkintä $x + (-y)\mathbf{i}$ lyhennetään tavanomaisesti

$$x + (-y)\mathbf{i} = x - y\mathbf{i}.$$

Luku \mathbf{i} vastaa geometrisesti luvun 1 kiertoa vastapäivään kulman $\pi/2$ verran.

Määritelmä 3. Kompleksilukujen joukolla \mathbb{C} tarkoitetaan joukkoa

$$\mathbb{C} = \{x + yi \mid x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}.$$

Lukua \mathbf{i} sanotaan *imaginaariyksiköksi*.

Kompleksiluvun $z = x + yi$ *reaaliosa* on $x = \operatorname{Re}(z)$ ja *imaginaariosa* on $y = \operatorname{Im}(z)$.

Kompleksilukujen esitys geometrisesti tason pisteinä on peräisin tanskalais-norjalaiselta matemaatikolta Caspar Wessel (1745 - 1818). Koska hän kirjoitti julkaisunsa tanskaksi, niin hänen ideansa jäivät vaille huomiota, kunnes Jean-Robert Argand (1768 - 1822) ja Johann Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855) keksivät asian uudelleen.

Esimerkki. Kompleksiluvun $z = 1 + 2\mathbf{i}$ reaaliosa on $\operatorname{Re}(z) = 1$ ja $\operatorname{Im}(z) = 2$.